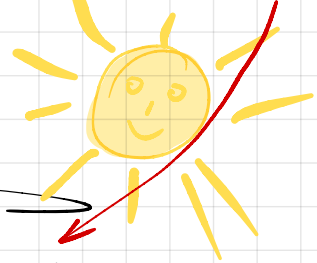
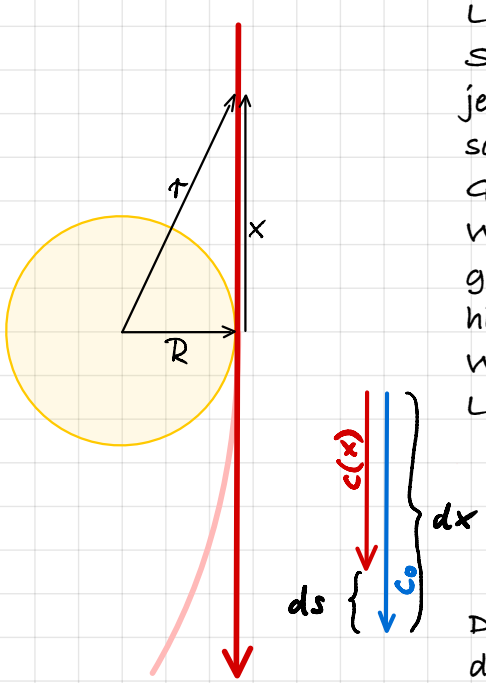
Lichtablenkung durch das Gravitationsfeld unserer Sonne



Betrachten wir zunächst nur die Ablenkung, die sich aus dem homogenen Teil des gravitativen „Brechungsindex" ergibt, also dem Teil, der für die Zeitdilatation verantwortlich ist:

$$n(r) = \gamma(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r c_0^2}}} \quad , \qquad (1)$$

wobei r der Abstand von der Sonne ist, M die Sonnenmasse, G die Gravitationskonstante und c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit im gravitationsfreien Raum.
Da $\gamma(r)$ im Fall unserer Sonne sehr klein ist, genügt es, immer nur die erste, lineare Näherung zu berücksichtigen.



Betrachten wir nebenstehende Zeichnung, wo ein Lichtstrahl gerade noch an der Sonne vorbei geht. R ist der Sonnenradius. Das Licht läuft entlang der roten Linie jetzt nicht mehr mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0, sondern mit einer um den Faktor γ verringerten Geschwindigkeit $c(r)$. Als erstes müssen wir die Wegdifferenz berechnen, die dieser rote Lichtstrahl gegenüber einem Lichtstrahl ohne Gravitationsfeld hinterher hinkt. In einem kleinen Zeitintervall dt ist die Weglängendifferenz ds zwischen den beiden Lichtstrahlen:

$$\begin{aligned} ds &= (c_0 - c(x)) \cdot dt \qquad \Big| \, dt = \frac{dx}{c_0} \\ &= \left(1 - \frac{c(x)}{c_0}\right) \cdot dx \end{aligned} \qquad (2)$$

Diese Weglängendifferenz gilt es über die ganze Länge des Lichtwegs zu berechnen. Dabei können wir noch Gln. (1) verwenden, denn es gilt:

$$1 - \frac{c(x)}{c_0} = 1 - \frac{1}{\gamma(x)} \approx \frac{GM}{r(x)\, c_0^2} \quad , \qquad (3)$$

wobei wir die lineare Näherung von $\gamma(x)$ verwendet haben. Die gesamte Weglängendifferenz, die der Lichtstrahl im Gravitationsfeld einem „freien" Lichtstrahl hinterherhinkt, erhält man durch Integration über den gesamten Lichtweg, also durch Integration über dx von $-\infty$ bis $+\infty$. Allerdings interessiert uns nicht diese Weglängendifferenz, sondern nur die Weglängendifferenz zweier dicht beieinander liegender, paralleler Lichtstrahlen. Der eine läuft im Abstand R an der Sonne vorbei, der andere im Abstand R+dR.
Diese Weglängendifferenz Δs zweier dicht nebeneinander liegender Lichtstrahlen erhält man, indem man Gln. (2) vor der Integration noch nach dR differenziert und die Ableitung mit ΔR multipliziert. Also

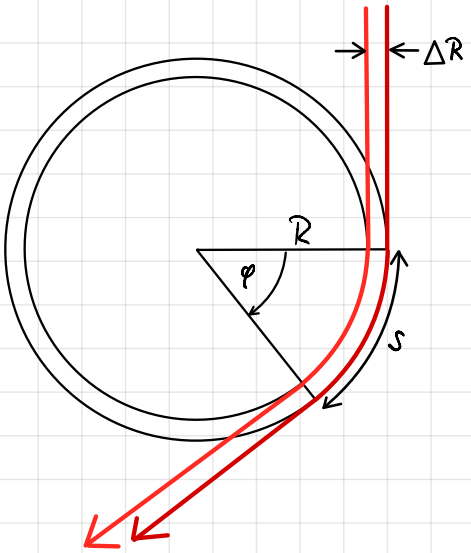
$$\Delta s = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dR}\left(1 - \frac{c(x)}{c_0}\right) \cdot dx \cdot \Delta R \qquad (4)$$

Zusammen mit Gln. (3) erhält man für ein homogenes Medium ($r = \sqrt{R^2 + x^2}$):

$$\Delta s = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dR} \frac{GM}{r(x)\, c_0^2}\, dx\, \Delta R = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dR} \frac{GM}{\sqrt{R^2+x^2} \cdot c_0^2}\, dx\, \Delta R \qquad (5)$$

Dieses Integral lässt sich problemlos lösen und man erhält:

$$\Delta s = \frac{2GM}{Rc_0^2}\, \Delta R \qquad (6)$$

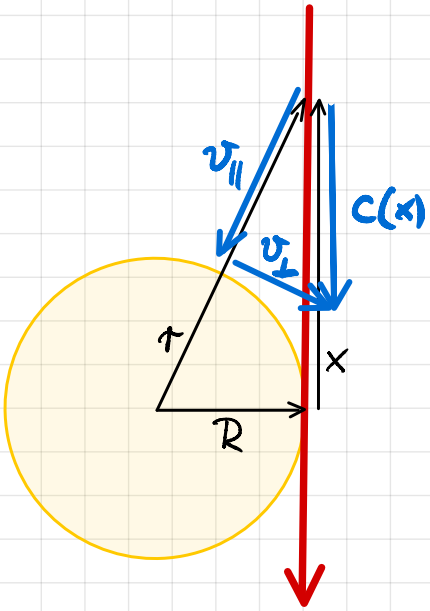


Gut, und was fängt man damit an? Wir vergleichen das mit der Weglängendifferenz zweier dicht beieinander liegenden Lichtstrahlen, die einen Kreisbogen durchlaufen. Die Weglängendifferenz zwischen dem inneren und äußeren Lichtstrahl Δs hängt dabei mit dem Ablenkwinkel φ wie folgt zusammen (φ in Radian):

$$s = \varphi R \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \varphi\, \Delta R \qquad (7)$$

Aus dem Vergleich der letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\varphi = \frac{2GM}{Rc_0^2} \qquad (8)$$



So, bisher haben wir aber nur die isotrope Zeitdilatation berücksichtige. Jetzt kommt noch die anisotrope "Raumkrümmung" dazu, d.h. daß der Brechungsindex in Richtung des Gravitationszentrums γ^2 ist. Dazu müssen wir die Geschwindigkeit in eine Komponente in Richtung des Gravitationszentrums $v_\parallel$ und eine senkrecht dazu $v_\perp$ zerlegen. Ohne Gravitation gilt:

$$v_\parallel = \frac{x}{r} c_0 \quad , \quad v_\perp = \frac{R}{r} c_0 \qquad (9)$$

Aufgrund des gravitativen anisotropen Brechungsindex wird $v_\parallel$ um γ^2 und $v_\perp$ um γ verringert. Näherungsweise erhält man dann für c(x):

$$c(x)^2 \approx \left(\frac{v_\parallel}{\gamma^2}\right)^2 + \left(\frac{v_\perp}{\gamma}\right)^2 \qquad (10)$$

Setzt man diesen Wert für c(x) in Gleichung (2) ein und ersetzt $\gamma, v_\parallel, v_\perp$ entsprechend den Gleichungen (1) und (9), und differenziert wie bei Gln. (5) nach dR, dann erhält man in linearer Näherung bzgl. GM/rc_0^2 für Δ s:

$$\Delta s = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dR}\left(\frac{GM}{r(x)c_0^2} + \frac{x^2 GM}{r(x)^3 c_0^2}\right) dx\, \Delta R \qquad (11)$$

Den ersten Term kennen wir schon von Gln. (5). Er wird zum Ablenkwinkel in Gln. (8) führen. Der 2. Term nähert sich für große x dem 1. Term an. Tatsächlich ergibt die Integration für ihn den gleichen Wert wie für den ersten Term. Damit er hält man schlussendlich den doppelten Wert von Gln. (8), also (in linearer Näherung!):

$$\varphi = \frac{4GM}{Rc_0^2} \qquad (12)$$

Dies ist der gleiche Wert, wie ihn auch Albert Einstein aus seiner Allgemeinen Relativitätstheorie erhalten hat, und der bei der Sonnenfinsternis am 29. Mai 1919 bestätigt wurde.