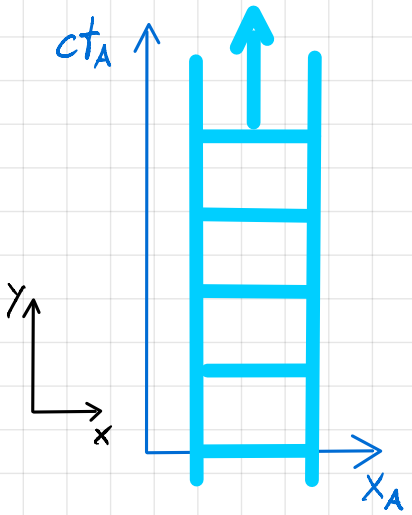
Die Lorentz-Transformationen

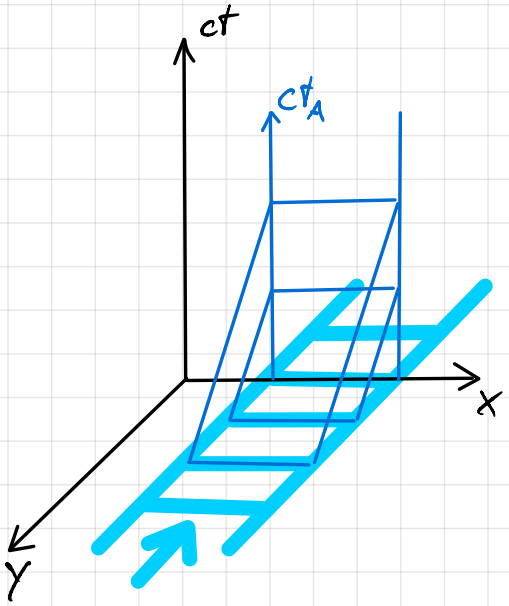
Aus dem seitlich drifteten Lichtstrahl lassen sich sehr direkt und intuitiv die Lorentz-Transformationen ablesen. Also die Veränderung von Raum und Zeit beim Wechsel von Alices in Bobs Bezugssystem. Wobei sich Bobs Bezugssystem relativ zu Alice mit der Geschwindigkeit v bewegt.
Von den Überlegungen zur Lichtuhr wissen wir, dass der Weg, den ein Lichtstrahl zurückgelegt hat, dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit c, ein Maß für die verstrichene Zeit ist. Wobei wir jetzt genauer sagen müssen: Der Weg, den ein Punkt auf einer Wellenfront zurückgelegt hat, ist ein Maß für die verstrichene Zeit, da es bei einem seitlich driftenden Lichtstrahl ja 2 Geschwindigkeiten gibt: Die Geschwindigkeit in Richtung des Lichtstrahls und die seitliche Driftgeschwindigkeit. Die Ausbreitungsrichtung des Lichtpunkts auf der Wellenfront kann man somit als Zeitachse ansehen. Die Längen auf dieser Zeitachse geben die verstrichene Zeit multipliziert mit c wieder.

Die Wellenfronten des Lichtstrahls wiederum stehen senkrecht zu ihrer Ausbreitungsrichtung und sind somit die „Linien der Gleichzeitigkeit": Alles auf einer Wellenfront passiert gleichzeitig. Andererseits definiert die Breite der Wellenfront so etwas wie einen Längenmaßstab, da die Breite der Wellenfront bei Reflexion an einem planen Spiegel, auch wenn er sich bewegt, unverändert bleibt.



Betrachten wir z.B. Alice Lichtuhr, also die Lichtuhr, die in Alices System ruht. Dort läuft der Lichtstrahl nach oben und legt in der Zeit t_A die Strecke ct_A zurück.
Die y-Richtung entspricht also einer Zeitachse.
Die Breite der Wellenfront dagegen ist ein Maß für eine Länge oder den Raum . Die x-Achse bleibt also eine Raumachse. Somit ist aus dem xy-Diagramm, mit Hilfe des nach oben laufenden Lichtstrahls, ein (x_A, ct_A)-Diagramm geworden.

Allerdings ist in diesem Bild noch ein kleiner Vorzeichenfehler: Die Zeitachse zeigt hier in Richtung der Ausbreitungsrichtung des Lichtstrahls. Es muss aber anders herum sein. Die Zeitachse muss entgegengesetzt zur Ausbreitungsrichtung des Lichtstrahls laufen, wie man an folgender Überlegung sieht: Die Zeit in der (x,t)-Ebene gibt den Zeitpunkt wieder, wann ein Ereignis die x-Ache passiert. Nachfolgende Wellenfronten entsprechen also einem späteren Zeitpunkt. Folglich muss der Zeitpfeil der Richtung des Lichts entgegen laufen.



In der nebenstehend Skizze ist das nochmal ausführlicher in einem (x,y,ct)-Diagramm dargestellt. Die xy-Ebene zeigt wie gewohnt den Lichtstrahl. Wobei der Lichtstrahl hier der y-Achse entgegen läuft. Die dritte Achse, die ct-Achse nach oben, zeigt die zeitliche Entwicklung.
Betrachtet man jetzt eine einzelne Wellenfront, so läuft

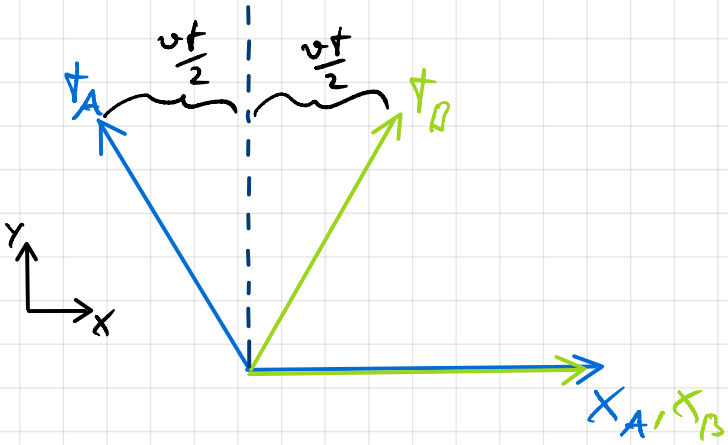
diese mit der Zeit nach hinten, also in negative y-Richtung, und auf der Zeitachse natürlich nach oben. Der Schnittpunkt der Wellenfront mit der xt-Ebene passiert um so später, je weiter die Wellenfront zur Zeit t=0 vorne, also in positiver y-Richtung lag.

Gut, kommen wir jetzt zurück zu unserer 2-dimensionalen Xy-Darstellung der Lichtuhr. Wir wissen nun, dass dies einer (x,ct)-Darstellung von Alices Raumzeit entspricht, vorausgesetzt, der Lichtstrahl kommt von oben.
Wie sieht es jetzt aus, wenn Bewegung mit ins Spiel kommt? Welche Form hat Bobs Raumzeit (x_B, ct_B)? Betrachten wir zunächst einmal nichtrelativistische Bewegungen, also die Galilei-Transformationen:

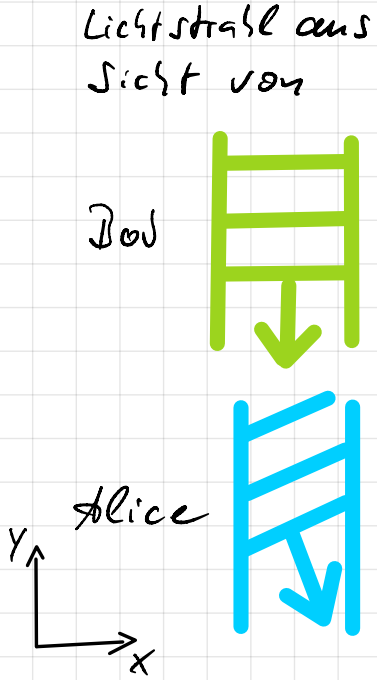
$$x_B = x_A - vt_A \qquad (1a)$$

$$t_B = t_A \qquad (1b)$$

Graphisch lassen sich die Galilei-Transformationen wie folgt darstellen:



Diese graphische Darstellung liegt nahe, wenn man bei Gln. (1a) auf beiden Seiten vt/2 addiert. (Die y-Achse selber entspricht hier einer „reduzierten Zeit", hat aber keine weitere Bedeutung.)
Wie sieht es jetzt bei relativistischen Bewegungen aus? Wie kommen wir dort zu einer graphischen Darstellung?

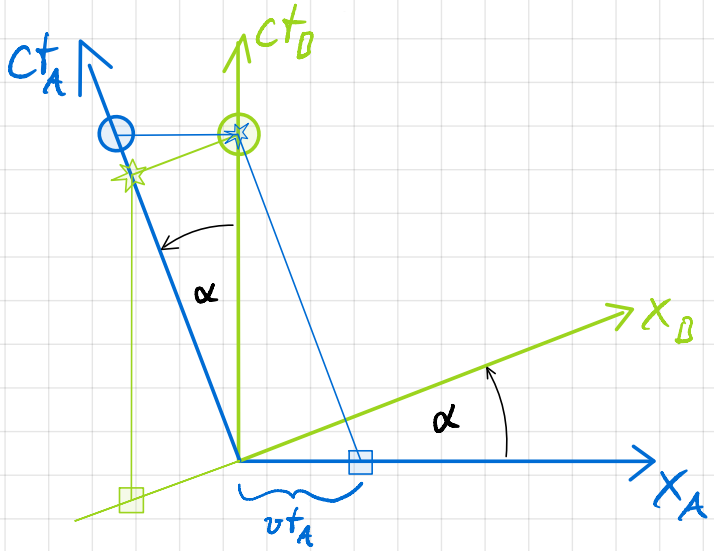


Im Gegensatz zu den obigen Galilei-Transformationen werden wir uns jetzt aber zuerst die graphische Darstellung überlegen und daraus dann die Transformationsgleichungen herleiten. Das ist möglich, weil wir unsere Raum-und Zeitachsen schon haben: Die Wellenfronten einerseits und die Ausbreitungsrichtungen eines Punkts auf einer Wellenfront andererseits. Wobei es sich wohlgemerkt um den gleichen, im Folgenden nach unten laufenden Lichtstrahl handelt; nur einmal aus Alices und das andere Mal aus Bobs Sicht. Bob sieht einen „geraden" Lichtstrahl, der senkrecht nach unten in die negative y-Richtung läuft. Alice dagegen sieht einen seitlich driftenden Lichtstrahl mit gekippten Wellenfronten, die schräg nach rechts unten laufen.
Jetzt müssen wir diese Achsen nur noch richtig Alices und Bobs Raumzeit-Koordinaten (x_A, ct_A) und (x_B, ct_B) zu ordnen.

Alices x_A-Achse bleibt die gewöhnliche x-Achse, entlang der sich Bob mit der Geschwindigkeit v bewegt. Aus den Überlegungen zur seitlich driftenden Lichtuhr folgt, dass die y-Achte jetzt Bobs Zeitachse ct_B, sein muss. Aus Bobs Sicht laufen die Wellenfronten senkrecht nach oben.
Die x_A- und ct_B-Achsen stehen also senkrecht aufeinander.

Die schiefen Wellenfront sind Bobs Linien der Gleichzeitigkeit. Entlang dieser Linien gilt t_B = konstant. Also muss aus Alices Sicht in diese Richtung Bobs x_B-Achse liegen.
Alice wiederum kann ihre Zeit messen, indem sie einen Punkt auf einer Wellenfront des seitlich driftenden Lichtstrahls verfolgt. Ihre Zeitachse ct_A ist dann dieser Richtung entgegengesetzt. Somit stehen auch die x_B- und ct_A-Achsen senkrecht aufeinander.
Setzt man alles zusammen erhält man folgende Darstellung, das sogenannte symmetrische Minkowski-Diagramm.

$$\tan\alpha = \beta\gamma$$
$$\beta = \frac{v}{c}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$



Überprüfen wir mal an einigen Beispielen, dass dieses Diagramm tatsächlich die Transformation von Alices in Bobs Bezugssystem widerspiegelt: Betrachten wir z.B. Bobs Position $x_B = 0$ zu irgendeiner Zeit t_B, (grüner Kreis). Dann befindet sich Bob aus Alices Sicht an des Stelle $x_A = vt_A$, was dem blauen Quadrat entspricht.
Oder: Bobs Uhr (grüner Kreis) geht aus Alices Sicht um den Faktor γ langsamer als ihre Uhr (blauer Kreis). Andererseits geht aus Bobs Sicht auch Alices Uhr um den Faktor γ langsamer als seine Uhr (grüner Stern), usw. Aus diesen und weiteren Überlegungen folgt eindeutig, dass dieses Diagramm die Koordinatentransformation von Alices in Bobs Bezugssystem wiedergibt.
Aus diesem symmetrischen Minkowski-Diagramm lassen sich nun die Transformationsgleichungen herleiten. Für einen beliebigen Punkt (x,y) gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ ct_B \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ ct_A \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Setzt man (2) = (3) und löst nach (x_B, ct_B) auf erhält man:

$$\begin{pmatrix} x_B \\ ct_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ ct_A \end{pmatrix}$$

Das sind die Lorentz-Transformationen.

Vertauscht man die Rollen von Alice und Bob, er hält man im Wesentlichen, so wie es sein muss, fast das gleiche Diagramm und fast die gleichen Transformationsgleichungen, außer dass die Geschwindigkeit v, und damit der Winkel α, das Vorzeichen wechseln. Aber wieso wechselt eigentlich das Vorzeichen, wobei es doch eigentlich keinen Unterschied zwischen Alice und Bob geben sollte? Nun, das liegt daran, dass wir uns normalerweise vorstellen, dass Alice und Bob nebeneinander stehen. Dann bewegt sich Bob aus Alices Sicht nach rechts, und Alice aus Bobs Sicht nach links. Würden Bob und Alice nicht nebeneinander, sondern sich gegenüber stehen und in die Augen schauen, dann wäre alles vollkommen symmetrisch. Aus Sicht des Relativitätsprinzips wäre das die konsequentere Darstellung. Für uns ist es aber anschaulicher, wenn sich Alice und Bob auf die gleiche Richtung der x-Achse einigen.