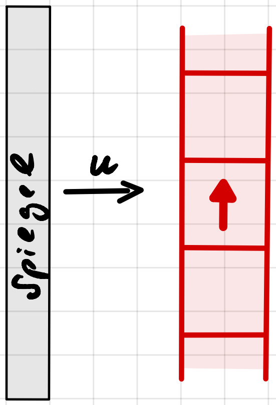
Ping-Pong mit Licht

Die stehende, elektromagnetische Welle in einem seitlich driftenden Laser-Resonator kann als einfachstes Modellsystem für ein Materie behaftetes Teilchen angesehen werden.
Seine träge Masse m ist proportional zur im Resonator gespeicherten Energie E_0 und es gilt:

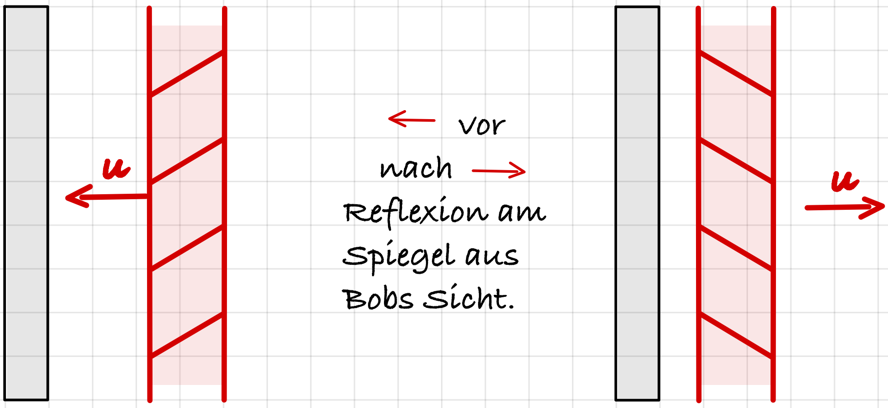
$$m = \frac{E_0}{c^2} \; .$$

Soll der Laser-Resonator in Bewegung versetzt und vom Ruhezustand auf die Geschwindigkeit v gebracht werden, dann muß, wie im Video erklärt, dem elektrischen Feld die Energie $(\gamma - 1)E_0$ zugeführt werden.
Einen Laserpointer, den ich in der Hand halte, kann ich natürlich sehr einfach in Bewegung versetzen. Wenn wir aber nur das elektromagnetische Feld betrachten, wie können wir das in Bewegung versetzen?
Eine Möglichkeit wäre ein Spiegel, mit dem wir seitlich auf den Laserstrahl „draufhauen".



Ein Spiegel bewegt sich mit der Geschwindigkeit u von der Seite auf einen Lichtstrahl zu.

Betrachten wir nun den Lichtstrahl aus Sicht des Spiegels und nennen das wieder Bobs Bezugssystem. Dann sieht Bob einen seitlich driftenden Lichtstrahl, der mit der Geschwindigkeit u auf ihn zukommt. Aus Bobs Sicht wird dieser seitlich driftende Lichtstrahl ganz normal am Spiegel reflektiert und driftet danach mit der Geschwindigkeit u vom Spiegel weg.



← vor
nach →
Reflexion am Spiegel aus Bobs Sicht.

Transferieren wir das Ganze jetzt wieder in Alices Bezugsystem, in dem der Spiegel die Geschwindigkeit u hat, dann hätte der reflektierte Lichtstrahl nach den Galilei-Transformationen die Geschwindigkeit $v = 2u$.
Nach den Lorentz-Transformationen addieren sich aber zwei Geschwindigkeiten u und ω nicht mehr linear, sondern nach dem folgendem Additionsgesetz:

$$v = \frac{u + \omega}{1 + \frac{u\omega}{c^2}} \qquad (1)$$

Da $\omega = u$ ist, hätte demzufolge der Lichtstrahl nach der Reflexion die seitliche Driftgeschwindigkeit

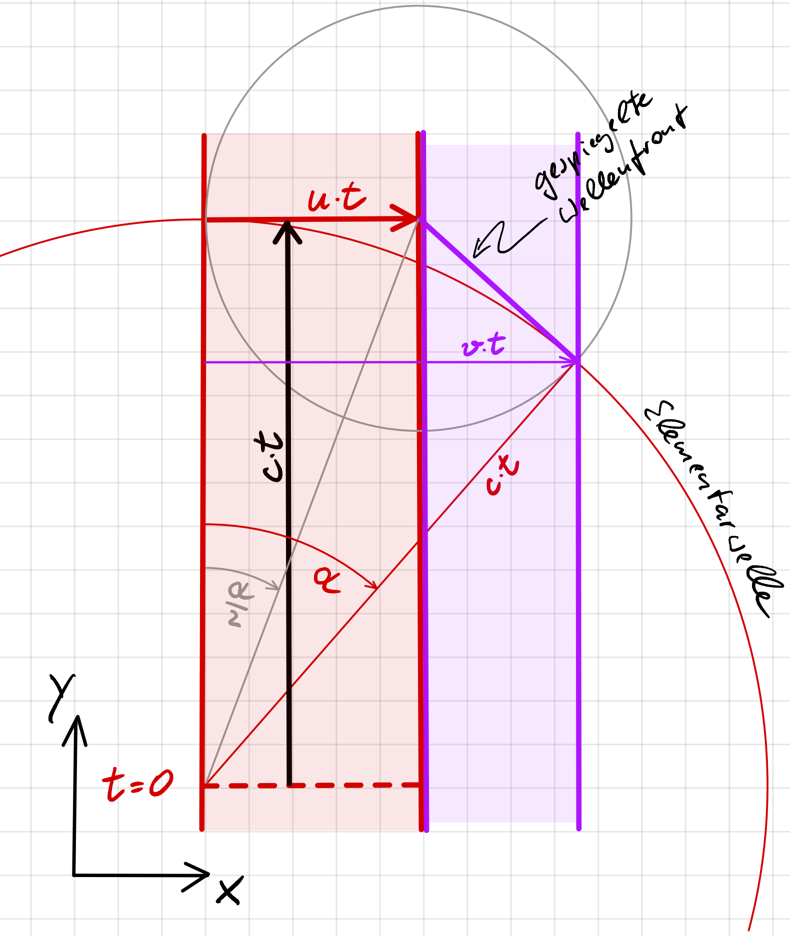
$$v = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} \qquad (2)$$

also eine etwas kleinere Geschwindigkeit, als im Fall der Galilei-Transformationen.
Löst man Gln. (2) nach u auf, so erhält man für die Geschwindigkeit, mit der der Spiegel den Lichtstrahl „schlagen" muss, um ihm die seitliche Driftgeschwindigkeit v zu verpassen:

$$u = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3)$$

Der Vorgang, wie der Lichtstrahl am bewegten Spiegel reflektiert wird, kann aber auch ohne Wechsel des Bezugssystems hergeleitet werden, allein mit Hilfe des Models der Huygensschen Elementarwellen.
Wenn der Spiegel die linke Seite des Lichtstrahls trifft, wird von den linken Seiten der Wellenfronten je eine Elementarwelle in alle Richtungen ausgesandt.
Der Spiegel durchwandert dann den Lichtstrahl unter ständigem Aussenden neuer Elementarwellen.
Die letzten Elementarwellen werden von den rechten Seiten der Wellenfronten ausgesandt.

Die folgende Zeichnung zeigt eine Elementarwelle, die von der linken Seite einer Wellenfront ausgesandt wurde, zu dem Zeitpunkt, wenn der Spiegel gerade die rechte Seite des Lichtstrahls erreicht.
Die Frage ist nun, wie sich die Elementarwellen zu einer neuen Wellenfront zusammensetzen?
Nun, die neue Wellenfront muss tangential an jener Elementarwelle anliegen, die von der linken Seite kam. Und außerdem muss sie durch den Punkt gehen, an dem sich die Wellenfront des ursprünglichen Lichtstrahls gerade befindet, wenn der Spiegel seine rechte Seite erreicht. Der Rest ist reine Geometrie.



Der Spiegel trifft den Lichtstrahl zur Zeit $t = 0$. Die linke Seite einer Wellenfront (gestrichelte rote Linie) sendet dann eine Elementarwelle aus. Nach einer gewissen Zeit t hat der Spiegel den ganzen (roten) Lichtstrahl durchwandert und dabei eine Strecke u*t zurückgelegt, die der Breite des roten Lichtstrahls entspricht.
In der gleichen Zeit hat aber die Wellenfront (gestrichelte Linie), genauso wie die Elementarwelle, die Strecke c*t zurückgelegt.
Die neue, gespiegelte Wellenfront (lila Linie) ergibt sich nun aus der Tangente an die Elementarwelle, die durch den Punkt geht, an dem sich die rechte Seite der Wellenfront gerade befindet, wenn der Spiegel den roten Lichtstrahl durchwandert hat.

Aus der Zeichnung lassen sich folgende Beziehungen ableiten:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{u}{c} \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) = \frac{v}{c}$$

Aus diesen Beziehungen lässt sich der Winkel α eliminieren und man erhält wieder die Gln. (2) bzw. (3).

Damit wurde eine Möglichkeit gezeigt, wie ein seitlich driftender Lichtstrahl erzeugt werden kann. Dabei ist zu sehen, wie der Lichtstrahl schmäler wird; also die relativistische Längenkontraktion in Richtung der Geschwindigkeit v.
Besonders schön ist in diesem Fall aber zu sehen, dass senkrecht zur Geschwindigkeit v keine Längenkontraktion stattfindet:
In y-Richtung ändert sich der Abstand der Wellenfronten nicht!
Sehr wohl ändert sich nach der Spiegelung aber der senkrechte Abstand zwischen den Wellenfront, also die Wellenlänge λ. Es gilt

$$\lambda = \lambda_0 / \gamma$$

Wenn der Spiegel nicht seitlich auf einen Lichtstrahl trifft, sondern ein Lichtstrahl senkrecht auf einen Spiegel mit der Geschwindigkeit u trifft, dann erfährt der Lichtstrahl, gemäß des longitudinalen Dopplereffekts, eine Wellenlängenänderung von

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1-u}{1+u} \overset{(3)}{=} \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$$

Wobei bei der Umformung Gln. (3) verwendet wurde. Kommt der Spiegel dem Lichtstrahl nicht entgegen, sondern bewegt er sich in die andere Richtung, dann gilt

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1+u}{1-u} \overset{(3)}{=} \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$$

Dies sind aber gerade die Wellenlängen im Laserresonnator auf Hin- und Rückweg, wenn der Laser nicht senkrecht sondern waagrecht mit der Geschwindigkeit **v** bewegt wird.