Berechnung des Abstands zweier Körper beim freien Fall in einem konstanten Gravitationsfeld

Ralf R. Lenke, 3. März 2023

In den beiden YouTube-Videos „*Was hält den Mond auf seiner Bahn*“ und „*Warum ist der Raum gekrümmt?*“ wurde die Gravitation anhand eines optischen Modells (Gravitationslinsen-Modell) erklärt, bei dem die beschleunigende Wirkung dadurch entsteht, dass eine Lichtwelle in das optisch dichtere Medium hineingezogen wird. Beim ersten Video konnte aus der Satelliten-, d.h. der Kreisbahn eines Lichtpakets um die Erde, der Zusammenhang zwischen Gravitationspotential ϕ und gravitativem Brechungsindex n_G wie folgt bestimmt werden:

$$n_G(R) \ = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2\phi}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}}$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante, M z.B. die Erdmasse, R der Abstand zum Erdmittelpunkt und c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Vakuum.

Streng genommen gilt dieser Wert für den Brechungsindex aber nur senkrecht zur Richtung der Gravitationskraft, da er aus der Kreisbahn eines Satelliten um das Gravitationszentrum bestimmt wurde. Im Folgenden soll untersucht werden, wie die Fallbewegung in Richtung des Gravitationszentrums unter Annahme dieses Brechungsindex aussehen würde. Dabei beschränken wir uns allerdings auf ein in erster Näherung linear abhängiges Gravitationspotential mit konstanter Gravitationskraft, da Einsteins Hypothese bzgl. der Ununterscheidbarkeit zwischen Beschleunigung und Gravitationsfeld nur lokal erfüllt sein muss.

Mit der linearen Näherung $\phi = gx$ erhält man:

$$n_G(x) \ = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2\phi}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2gx}{c^2}}}$$

Untersuchen wir nun, wie das Licht in ein optisch dichteres Medium hineingebrochen wird. Nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz gilt:

$$n(x)\, sin(\alpha) = n(x+dx)\, sin(\alpha + d\alpha)$$

Da $sin(\alpha)$ gerade $1/\gamma_n$ ist, folgt:

$$n\ \sqrt{1-\frac{n^2(v^2)}{c^2}} = (n+dn)\ \sqrt{1-\frac{(n+dn)^2(v^2+d(v^2))}{c^2}}$$

In linearer Näherung lässt sich dies umformen zu (wobei die Lichtgeschwindigkeit c im Folgenden, mit Ausnahme der letzten Gleichung, zu 1 normiert wird):

$$\frac{d(v^2)}{dn} = \frac{2-4n^2(v^2)}{n^3}$$

Dies lässt sich weiter umformen zu:

$$4n^3(v^2) + n^4\frac{d(v^2)}{dn} = \frac{d(n^4v^2)}{dn} = 2n$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$v^2(n) = \frac{n^2 - n_0^2}{n^4}$$

wobei *n₀* der Brechungsindex am Startpunkt v = 0 ist.

Aber eigentlich sind wir ja an der Beschleunigung interessiert. Für die Beschleunigung *a* gilt:

$$a = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dn}\frac{dn}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dn}\frac{dn}{dx}$$

Setzt man hier $d(v^2)/\,dn$ und $n = n_G(x)$ von oben ein, erhält man für die Beschleunigung an der Stelle $x - x_0$:

$$a = g - \left(\frac{2gn_0}{c}\right)^2 (x - x_0) = g\left(1 - \frac{4g(x - x_0)}{(c/n_0)^2}\right)$$

Dabei ist x_0 der Startpunkt des freien Falls und n_0 der Brechungsindex an dieser Stelle. Anfangsbeschleunigung und Anfangsgeschwindigkeit an der Stelle x_0 sind also für ein konstantes Gravitationsfeld auch in diesem Brechungslinsen-Modell in erster Näherung unabhängig vom Startpunkt des freien Falls. Da der Brechungsindex n_0 in der Regel sehr klein ist (am Sonnenrand gilt n_G-1 = 2e-6), wird die Beschleunigung auch erst nach einer sehr großen Entfernung vom Startpunkt kleiner.

Die Anfangsbeschleunigung ist also in erster Näherung unabhängig vom Startpunkt. Daraus folgt, dass der Abstand zwischen zwei Punkten im lokalen Inertialsystem zumindest anfangs konstant bleibt. Damit gäbe es aber keine Lorentz-Kontraktion. Auf diesen Punkt gehe ich in meinem YouTube-Video „*Warum ist der Raum gekrümmt?*“ näher ein.